Дискретная математика

том 2 выпуск 4 * 1990

УДК 519.1

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМЛЮЩЕГО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

А. Д. Вайнштейн

Рассматривается задача построения параллелограмма минимальной площади, содержащего заданное n-точечное множество N. Дана характеризация локально экстремальных параллелограммов; в невырожденном случае их число равно числу сторон выпуклой оболочки N. Это позволяет предложить алгоритм решения задачи со сложностью $O(n \log n)$. Рассмотрена также ситуация, когда выпуклая оболочка N известна заранее. Указан метод перехода от одного локального экстремума к другому, позволяющий в этой ситуации снизить оценку сложности до $O(n)$.

§ 1. Введение

В системах автоматизированного проектирования и машинной графики часто приходится иметь дело с гладкими поверхностями в трехмерном пространстве. При этом обычно известно лишь конечное число точек, лежащих на поверхности, и поэтому для анализа ситуации в произвольной точке необходимо прибегнуть к интерполяции. Для удобства интерполяционных вычислений и уменьшения объема хранимой информации желательно, чтобы проекции точек, задающих рассматриваемую поверхность, на некоторую фиксированную плоскость располагались регулярно, например, совпадали с узлами двумерной решетки (не обязательно ортогональной). Поэтому перед началом работы с поверхностью обычно производится предварительная интерполяция в узлах этой решетки, а полученные таким образом значения хранятся и используются для последующих вычислений.

Для осуществления предварительной интерполяции конечное множество N проекций исходных точек поверхности на плоскость заключается в некоторый параллелограмм (чаще всего — прямоугольник), стороны которого затем разбиваются на равные части. Это разбиение и определяет решетку, на которой будет проводиться интерполяция. Естественно, желательно, чтобы полученная решетка содержала как можно меньше «лишних» точек (т. е. точек, не принадлежащих выпуклой оболочке N). Поскольку общее число точек решетки при заданном ее шаге пропорционально площади параллелограмма, приходим к задаче отыскания параллелограмма минимальной площади, содержащего заданное конечное множество точек. Такой параллелограмм мы будем в дальнейшем называть *минимальным объемлющим параллелограммом.*

Общая задача отыскания минимальных объемлющих многоугольников сформулирована в [2]. Там сообщается, в частности, о наличии алгоритма отыскания минимального объемлющего четырехугольника со сложностью $O(n^2 \log n)$, где $n = |N|$ — мощность исходного множества точек. Близкая к нашей задача отыскания минимального объемлющего прямоугольника рассматривалась в [3]; предложенный там алгоритм имеет сложность $O(n \log n)$. Эта оценка может быть снижена до $O(n)$, если известна выпуклая оболочка N. Ниже показано, что эти утверждения справедливы и для задачи отыскания минимального объемлющего параллелограмма. Отметим также определенное сходство этой задачи с задачей отыскания минимального объемлющего треугольника, рассмотренной в [4, 5].

Алгоритм Фримена — Шапиро [3] отыскания минимального объемлющего прямоугольника основан на следующем утверждении: существует такой минимальный объемлющий N прямоугольник, на одной из сторон которого лежит сторона выпуклой оболочки N. Зафиксировав сторону $C = \operatorname{conv} N$, которая будет обладать этим свойством, мы однозначно зададим соответствующий объемлющий прямоугольник: на каждой из трех его оставшихся сторон лежит по крайней мере одна вершина C, причем в каждой из таких вершин углы между инцидентными ей сторонами C и стороной прямоугольника имеют разные знаки. Таким образом, решение задачи сводится к перебору всех сторон C и сравнению площадей соответствующих им прямоугольников.

Число сторон C не превосходит n. Построение прямоугольника, соответствующего какой-либо одной стороне, потребует $O(n)$ операций. Переход к следующей (в циклическом списке) стороне C осуществляется так: определяем направления сторон будущего прямоугольника — параллельно рассматриваемой стороне C и перпендикулярно ей — и, двигаясь вдоль C в выбранном направлении, проверяем в каждой вершине углы между инцидентными ей сторонами и этими направлениями. Каждая такая проверка требует $O(1)$ операций, а суммарное число проверок не превосходит $3n$. Отсюда и вытекает линейная оценка сложности алгоритма [3] в случае, когда C известна заранее.

Для задачи о минимальном объемлющем параллелограмме справедлив аналог утверждения Фримена — Шапиро: существует такой минимальный объемлющий N параллелограмм, на двух смежных сторонах которого лежат стороны C. Это утверждение и ряд вспомогательных лемм доказаны в § 2. Однако эта характеризация недостаточна для построения линейного алгоритма, так как требует просмотра $O(n^2)$ параллелограммов. В § 3 проводится более тонкая характеризация допустимых пар сторон C, которые могут лежать на сторонах искомого параллелограмма, и доказывается, что число таких пар есть $O(n)$. В § 4 приведены два алгоритма построения искомого параллелограмма. Первый из них не требует предварительного знания C и имеет сложность $O(n \log n)$. Второй алгоритм при известной C имеет сложность $O(n)$; линейность оценки основана на возможности быстрого перехода от одной допустимой пары сторон C к следующей в проективном упорядочении. Таким образом, эти алгоритмы соотносятся между собой так же, как алгоритмы построения минимального объемлющего треугольника из [4] и [5].

§ 2. Антиподальные пары

Пусть M — произвольный выпуклый многоугольник. Пару (f, x), где f — сторона M, а x — вершина M, назовем *антиподальной*, если прямая, параллельная f и проходящая через x, является опорной для M. Если (f, x) — антиподальная пара, то f называется *антиподом* x, а x — антиподом f. Очевидно, каждая сторона f имеет не менее одного и не более двух антиподов; в последнем случае эти два антипода — смежные вершины M и соединяющая их сторона параллельна f, причем антиподами этой стороны являются концы стороны f. Заметим, что могут существовать вершины M, не имеющие антиподов.

Пусть P — произвольный параллелограмм, (f, x) — антиподальная пара выпуклого многоугольника M. Будем говорить, что пара (f, x) *лежит на паре противоположных сторон* P, если сторона f целиком лежит на одной из сторон P, а вершина x — на его противоположной стороне.

Лемма 1. *Существует такой минимальный объемлющий N параллелограмм, у которого на обеих парах противоположных сторон лежат антиподальные пары выпуклой оболочки N.*

Доказательство. Пусть $C = \operatorname{conv} N$ — выпуклая оболочка N, P — минимальный объемлющий N параллелограмм. Очевидно, на каждой стороне P должна лежать хотя бы одна вершина C (вершину C, совпадающую с вершиной P, считаем лежащей на обеих сторонах P, ей инцидентных). Пусть вершины x и y лежат на параллельных сторонах P и других вершин C на этих сторонах нет. Зафиксируем вторую пару параллельных сторон P и рассмотрим пучок пар параллельных прямых, одна из которых проходит через x, а другая — через y. Каждая такая пара совместно с только что зафиксированной определяет параллелограмм. Если в качестве параметра τ указанного однопараметрического семейства параллелограммов выбрать котангенс угла между сторонами параллелограмма, то, как нетрудно убедиться, закон изменения площади будет иметь вид $S(\tau) = \alpha + \beta\tau$, где $\alpha \in \mathbf{R}_+$, $\beta \in \mathbf{R}$. Изменяя τ (увеличивая, если $\beta \leqslant 0$, и уменьшая, если $\beta > 0$), добьемся того, что на одной из сторон, проходящих через вершины x и y, появится вершина $z \in C$. Площадь параллелограмма при этом не увеличится, а на рассматриваемой паре сторон будет лежать антиподальная пара для C. Зафиксировав теперь прямые, несущие эту пару, применим описанную выше процедуру к другой паре противоположных сторон P. В результате получим объемлющий параллелограмм, удовлетворяющий утверждению леммы, площадь которого не превосходит площади P. Лемма доказана.

Пусть M — выпуклый многоугольник, l — произвольная прямая. Проведем две прямые, параллельные l и опорные для M. Пусть x — вершина M, лежащая на одной из этих прямых, y и z — вершины M, смежные с x. Хотя бы одна из этих вершин (для определенности — вершина y) не лежит на указанной прямой. Будем переобозначать вершины M в порядке обхода: $v_0 = x$, $v_1 = y$ и т. д. до тех пор, пока не найдем вершину $v_k \in M$, лежащую на второй опорной прямой, параллельной l. Если на этой прямой есть еще одна вершина M, то обозначим ее u_0, следующую за ней при том же направлении обхода — u_1, и т. д. до тех пор, пока не найдем вершину $u_m \in M$, лежащую на первой из выбранных опорных прямых (очевидно, либо $u_m = z$, либо $u_m = x = v_0$). Если же на опорной прямой, проходящей через v_k, нет других вершин M, положим $u_0 = v_k$ и поступим так же, как в предыдущем случае (рис. 1). Построенные множества вершин назовем соответственно *v- и u-цепью.*

Пусть $J_k = \{0, 1, \ldots, k\}$, $J_m = \{0, 1, \ldots, m\}$. Определим отображение A_v: $J_k \to J_m$ следующим образом. Рассмотрим множество антиподов стороны $v_i v_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Как уже отмечалось ранее, это множество содержит либо одну вершину M, либо две смежные вершины. Очевидно, ни одна из этих вершин не может оказаться вне u-цепи. Таким образом, при фиксированном i, $1 \leqslant i \leqslant k$, антиподами стороны $v_i v_{i-1}$ являются либо вершина u_j, либо вершины u_{j-1} и u_j; в обоих случаях положим $A_v(i) = j$. Кроме того, положим $A_v(0) = 0$. Отображение A_u: $J_m \to J_k$ определим аналогично, поменяв u- и v-цепи местами.

Лемма 2. *Отображения A_v и A_u монотонно неубывают.*

Доказательство вытекает из результатов [3].

Зафиксируем ориентацию плоскости, задаваемую обходом M в порядке возрастания индексов вершин. Тогда можно определить отображения γ_v: $J_k \to [0, \pi]$ и γ_u: $J_m \to [0, \pi]$. При $1 \leqslant i \leqslant k$ $\gamma_v(i)$ будет обозначать угол между прямой l и прямой v_iv_{i-1}; кроме того, $\gamma_v(0)=0$. Аналогично, при $1\leqslant j\leqslant m$ $\gamma_u(j)$ — угол между прямой l и прямой u_ju_{j-1}, $\gamma_u(0)=0$ (см. рис. 1).

Ниже перечислены свойства функции γ_u; аналогичные утверждения относительно γ_v не приводятся ради экономии места.

Лемма 3. 1) *При всех* $j\in J_m$ $\gamma_u(j)<\gamma_u(j+1)$ (*здесь и далее считаем, что* $\gamma_u(m+1)=\pi$).

2) *Неравенство* $\gamma_u(j)<\gamma_v(i)<\gamma_u(j+1)$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $A_v(i)=j$ *и* $v_iv_{i-1}\nparallel u_ju_{j-1}$.

3) *Если* $A_v(i)=j$ *и* $v_iv_{i-1}\parallel u_ju_{j-1}$, *то* $A_u(j)=i$ *и* $\gamma_v(i)=\gamma_u(j)$.

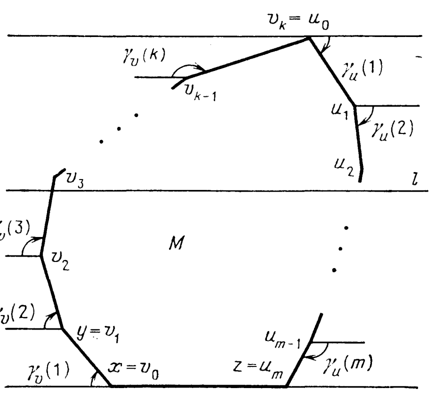

Рис. 1

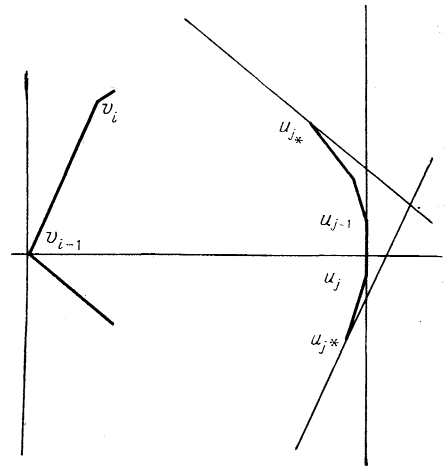

Рис. 2

Доказательство вытекает непосредственно из определений функций γ_u и γ_v и отображений A_u и A_v.

Теперь мы можем доказать следующее важное свойство отображений A_u и A_v.

Лемма 4. *Пусть* $j_*=A_v(i-1)<A_v(i)=j^*$, $1\leqslant i\leqslant k$. *Тогда для всех* j *таких, что* $j_*<j<j^*$, $A_u(j)=i-1$. *Кроме того, если* $u_{j^*}u_{j^*-1}\nparallel v_iv_{i-1}$, *то и* $A_u(j^*)=i-1$; *в противном случае* $A_u(j^*)=i$.

Доказательство. Пусть сначала $u_{j^*}u_{j^*-1}\nparallel v_iv_{i-1}$. Тогда при $j_*<j\leqslant j^*$ из утверждения 1) леммы 3 получаем неравенство $\gamma_u(j_*+1)\leqslant\gamma_u(j)\leqslant\gamma_u(j^*)$, а из утверждения 2) этой леммы — неравенства $\gamma_u(j^*)<\gamma_v(i)<\gamma_u(j^*+1)$ и $\gamma_u(j_*)\leqslant\gamma_v(i-1)<\gamma_u(j_*+1)$. Из этих неравенств вытекает, что $\gamma_v(i-1)<$ $<\gamma_u(j)<\gamma_v(i)$, откуда снова согласно утверждению 2) леммы 3 получаем, что $A_u(j)=i-1$ (рис. 2).

Если же $u_{j^*}u_{j^*-1}\parallel v_iv_{i-1}$, то равенство $A_u(j^*)=i$ есть утверждение 3) леммы 3, а равенства $A_u(j)=i-1$ при $j_*<j<j^*$ доказываются точно так же, как в разобранном выше случае.

§ 3. l-разделимые антиподальные пары

Пусть l — произвольная прямая. Через $d^l(t)$ будем обозначать расстояние от произвольной точки t до прямой l; в случае, когда из контекста ясно, о какой прямой идет речь, индекс в этом обозначении будет опускаться.

Пусть M — выпуклый многоугольник, f — сторона M, x — вершина M. Назовем пару (f, x) *l-разделимой*, если прямая, параллельная l и проходящая через x, пересекает сторону f (быть может, в ее конце). Очевидно, если l не пересекается с внутренностью M, то пара (f, x) l-разделима тогда и только тогда, когда $\min\{d^l(y),\ d^l(z)\}\leqslant d^l(x)\leqslant\max\{d^l(y),\ d^l(z)\}$, где y и z — концы f.

Важность понятия l-разделимой антиподальной пары обусловлена следующим утверждением.

Лемма 5. *Пусть P — минимальный объемлющий N параллелограмм, удовлетворяющий утверждению леммы 1, (f, x) — антиподальная для $C=\operatorname{conv} N$ пара, лежащая на одной из пар противоположных сторон P. Тогда на другой паре противоположных сторон P лежит f-разделимая антиподальная пара для C.*

Доказательство. Поскольку P удовлетворяет утверждению леммы 1, на паре его противоположных сторон, не несущей пару (f, x), лежит хотя бы одна антиподальная для C пара (g, w). Пусть u и v — концы g, l — прямая, несущая f. Для определенности будем считать, что $d(u)>d(v)$.

Очевидно, сторона P, несущая g, не содержит вершин C, отличных от u и v, а сторона, несущая w, может содержать еще не более одной вершины C. Если такая вершина есть, обозначим ее z, а если ее нет, то положим $z=w$.

Если бы были справедливы неравенства $d(u)\geqslant d(w)\geqslant d(v)$ либо $d(u)\geqslant\geqslant d(z)\geqslant d(v)$, то пара (g, w) либо (g, z) была бы f-разделимой. Следовательно, предполагая без потери общности, что $d(w)\geqslant d(z)$, имеем три возможности:

1) $d(w)\geqslant d(z)>d(u)>d(v)$;
2) $d(u)>d(v)>d(w)\geqslant d(z)$;
3) $d(w)>d(u)>d(v)>d(z)$.

В случае 1) рассмотрим пучок параллельных прямых, проходящих через точки u и z. Поскольку вершина v лежит на стороне P, только одно из направлений изменения параметра τ (см. доказательство леммы 1) сохраняет свойство объемлемости. Элементарная выкладка показывает, что площадь $S(\tau)$ при таком изменении уменьшается, а это противоречит минимальности P.

В случае 2) следует провести аналогичные рассуждения, но для пары точек v и w.

В случае 3) антиподальная пара (wz, u) является f-разделимой. Лемма доказана.

Пусть M — выпуклый многоугольник, l — произвольная прямая. Проведя опорные к M прямые, параллельные l, разобьем, как и ранее, вершины M на u-цепь и v-цепь. Определим функции $d_v\colon J_k\to\mathbf{R}_+$ и $d_u\colon J_m\to\mathbf{R}_+$ формулами $d_v(i)=d^{l^*}(v_i)$, $d_u(j)=d^{l^*}(u_j)$, где l^* — та из указанных прямых, которая проходит через v_0. Очевидно, функция d_v монотонно возрастает, а d_u монотонно убывает.

Рассмотрим теперь на J_k наряду с d_v функцию $\tilde d_v=d_u\circ A_v$ (т. е. $\tilde d_v(i)=$ $=d_u(A_v(i))$). Аналогично определим на J_m функцию $\tilde d_u=d_v\circ A_u$. Справедлив следующий аналог леммы 3.

Лемма 6. 1) *При всех $j\in J_m$ $\tilde d_u(j)\leqslant\tilde d_u(j+1)$ (здесь и далее считаем, что $\tilde d_u(m+1)=d$, где d — расстояние между парой опорных прямых, параллельных l).*

2) *Неравенство $\tilde d_u(j)<d_v(i)\leqslant\tilde d_u(j+1)$ справедливо тогда и только тогда, когда $A_v(i)=i$ и $v_iv_{i-1}\nparallel u_ju_{j-1}$.*

3) *Если $A_v(i)=j$ и $v_iv_{i-1}\parallel u_ju_{j-1}$, то $A_u(j)=i$ и $\tilde d_u(j)=d_v(i)$.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из леммы 2 и монотонности d_v.

Докажем утверждение 2). Пусть $\tilde d_u(j)<d_v(i)\leqslant\tilde d_u(j+1)$. Очевидно, $v_iv_{i-1}\nparallel u_ju_{j-1}$. Из левого неравенства и монотонности d_v получаем $A_u(j)<i$; отсюда и из утверждений 1) и 2) леммы 3 для функции γ_v вытекает $\gamma_u(j)<$

$<\gamma_v(A_u(j)+1)\leqslant\gamma_v(i)$. Из правого неравенства с помощью аналогичных рассуждений следует $i\leqslant A_u(j+1)$ и $\gamma_v(i)\leqslant\gamma_v(A_u(j+1))<\gamma_u(j+1)$. Объединяя найденные неравенства, получаем $\gamma_u(j)<\gamma_v(i)<\gamma_u(j+1)$, и остается лишь воспользоваться утверждением 2) леммы 3.

Пусть теперь $A_v(i)=j$ и $v_iv_{i-1}\nparallel u_ju_{j-1}$. Из леммы 3 тогда получаем $\gamma_v(A_u(j))\leqslant\gamma_u(j)<\gamma_v(i)$, а значит, $\tilde{d}_u(j)<d_v(i)$. Аналогично, имеем $\gamma_v(i)<$ $<\gamma_u(j+1)\leqslant\gamma_v(A_u(j+1)+1)$, откуда $d_v(i)\leqslant\tilde{d}_u(j+1)$.

Наконец, утверждение 3) очевидно.

Как и в случае леммы 3, аналогичные утверждения (с очевидными изменениями) справедливы и для функции $\tilde{d}_v$.

Две антиподальные пары назовем *смежными*, если множества их вершин имеют ровно два общих элемента, и *сильно смежными*, если входящие в них стороны параллельны либо совпадают. Теперь мы можем доказать основное свойство l-разделимых антиподальных пар.

Лемма 7. *Пусть M — выпуклый многоугольник, l — произвольная прямая. Тогда в M есть не менее одной и не более четырех l-разделимых антиподальных пар, причем все такие пары смежны.*

Доказательство. Рассмотрим на J_k функции d_v и $\tilde{d}_v$. Очевидно, $\tilde{d}_v(0)=d$, $d_v(0)=0$, $d_v(k)=d$, причем d_v монотонно возрастает, а $\tilde{d}_v$ в силу утверждения 1) леммы 6 монотонно не возрастает. Следовательно, существует единственный индекс $i\in J_k$ такой, что $d_v(i)\geqslant\tilde{d}_v(i)$ и $d_v(i-1)<\tilde{d}_v(i-1)$. Обозначим $j=A_v(i)$ и рассмотрим три возможных случая:

I. $d_v(i)=\tilde{d}_v(i)$;

II. $d_v(i)>\tilde{d}_v(i)\geqslant d_v(i-1)$;

III. $d_v(i)>d_v(i-1)>\tilde{d}_v(i)$.

В случае I антиподальная пара (v_iv_{i-1}, u_j), очевидно, является l-разделимой. Кроме того, при $\gamma_u(j)=\gamma_v(i)$ l-разделимой является антиподальная пара (u_ju_{j-1}, v_i). Далее, при $j<m$ и $\gamma_u(j+1)\leqslant\gamma_v(i+1)$ l-разделимой является антиподальная пара $(u_{j+1}u_j, v_i)$, а при $i<k$ и $\gamma_v(i+1)\leqslant\gamma_u(j+1)$ — антиподальная пара $(v_{i+1}v_i, u_j)$. Очевидно, все указанные пары смежны. Докажем, что кроме указанных четырех пар других l-разделимых антиподальных пар нет.

Действительно, пусть такая пара существует. Тогда она имеет либо вид $(v_{i^*}v_{i^*-1}, u_{j^*})$, причем выполняется одно из условий

$1_v)$ $j^*=A_v(i^*)$, $1\leqslant i^*<i$;
$2_v)$ $j^*=A_v(i^*)$, $i+1<i^*\leqslant k$;
$3_v)$ $j^*=A_v(i^*)-1$, $\gamma_u(j^*+1)=\gamma_v(i^*)$, $1\leqslant i^*<i$;
$4_v)$ $j^*=A_v(i^*)-1$, $\gamma_u(j^*+1)=\gamma_v(i^*)$, $i+1<i^*\leqslant k$,

либо вид $(u_{j_*}u_{j_*-1}, v_{i_*})$, причем выполняется одно из условий

$1_u)$ $i_*=A_u(j_*)$, $1\leqslant j_*<j$;
$2_u)$ $i_*=A_u(j_*)$, $j+1<j_*\leqslant m$;
$3_u)$ $i_*=A_u(j_*)-1$, $\gamma_v(i_*+1)=\gamma_u(j_*)$, $1\leqslant j_*<j$;
$4_u)$ $i_*=A_u(j_*)-1$, $\gamma_v(i_*+1)=\gamma_u(j_*)$, $j+1<j_*\leqslant m$.

В случае $1_v)$ по определению i имеем $d_v(i^*)<\tilde{d}_v(i^*)=d_u(j^*)$, а значит, пара $(v_{i^*}v_{i^*-1}, u_{j^*})$ не является l-разделимой.

В случае $2_v)$ из монотонности d_v и утверждения 1) леммы 6 получаем, что $d_v(i^*-1)>d_v(i)=\tilde{d}_v(i)\geqslant\tilde{d}_v(i^*)=d_u(j^*)$, и пара $(v_{i^*}v_{i^*-1}, u_{j^*})$ вновь не l-разделима.

Случай $3_v)$ рассматривается так же, как случай $1_v)$.

В случае $4_v)$, очевидно, $A_v(i^*)>j$. Поэтому нестрогое неравенство в доказательстве $2_v)$ заменяется на строгое, откуда $d_v(i^*-1)>d_u(j^*)$, и пара $(v_{i^*}v_{i^*-1}, u_{j^*})$ вновь не l-разделима.

В случае 1_u) из монотонности d_v и утверждений 1) — 3) леммы 6 получаем, что

$$d_v(i_*) = \tilde{d}_u(j_*) \leqslant \tilde{d}_u(j) \leqslant d_v(i) = d_u(j) < d_u(j_*),$$

а значит, пара $(u_{j*}u_{j*-1}, v_{i*})$ не является l-разделимой.

В случае 2_u) из монотонности d_u и утверждений 1) и 2) леммы 6 вытекает, что $d_u(j_* - 1) < d_u(j) = d_v(i) \leqslant \tilde{d}_u(j+1) \leqslant \tilde{d}_u(j_*) = d_v(i_*)$, и пара $(u_{j*}u_{j*-1}, v_{i*})$ вновь не l-разделима.

Случай 3_u) рассматривается так же, как случай 1_u).

В случае 4_u), очевидно, $A_u(j_*) > A_u(j_* - 1)$. Поэтому последнее нестрогое равенство в доказательстве 2_u) заменяется на строгое, откуда $d_u(j_* - 1) < d_v(i_* - 1)$, и пара $(u_{j*}u_{j*-1}, v_{i*})$ вновь не l-разделима.

В случае II антиподальная пара (v_iv_{i-1}, u_j), очевидно, является l-разделимой. Кроме того, если $\gamma_u(j) = \gamma_v(i)$, то при $d_u(j-1) \geqslant d_v(i)$ l-разделимой является также антиподальная пара (u_ju_{j-1}, v_i), а при $d_u(j-1) \leqslant d_v(i)$ — пара (v_iv_{i-1}, u_{j-1}). Все эти три пары смежны. Доказательство отсутствия других l-разделимых антиподальных пар проводится так же, как в случае I.

В случае III выполняется неравенство $\tilde{d}_v(i) < d_v(i-1) < \tilde{d}_v(i-1)$, а значит, $j_* = A_v(i-1) < A_v(i) = j^*$ и существует такое $\tilde{j}$, $j_* + 1 \leqslant \tilde{j} \leqslant j^*$, что $d_u(\tilde{j}) \leqslant d_v(i-1) < d_u(\tilde{j}-1)$. Если $u_{j*}u_{j*-1} \nparallel v_iv_{i-1}$, то в силу леммы 4 имеем $A_u(\tilde{j}) = i-1$, а значит, $(u_{\tilde{j}}u_{\tilde{j}-1}, v_{i-1})$ — l-разделимая антиподальная пара (см. рис. 2 при $\tilde{j} = j$). Если же $u_{j*}u_{j*-1} \parallel v_iv_{i-1}$, то при $\tilde{j} < j^*$ по аналогичным соображениям та же пара $(u_{\tilde{j}}u_{\tilde{j}-1}, v_{i-1})$ l-разделима и антиподальна, а при $\tilde{j} = j^*$, очевидно, антиподальна l-разделимая пара (v_iv_{i-1}, u_{j*-1}).

Доказательство отсутствия l-разделимых антиподальных пар, не смежных с указанными, и анализ смежных пар проводятся так же, как в случае I.

§ 4. Алгоритмы и оценки сложности

Пусть G — многообразие всех прямых на плоскости. Определим отображение Γ: $G \to \mathbf{R}P^1$, сопоставляющее каждой прямой параллельную ей прямую, проходящую через фиксированную точку плоскости (общую для всех прямых). Для каждой антиподальной пары (f, x) выпуклого многоугольника M определим разделяющее множество $L(f, x) \subset \mathbf{R}P^1$ следующим образом: $t \in L(f, x)$ тогда и только тогда, когда найдется такая прямая l, что $\Gamma(l) = t$ и пара (f, x) l-разделима.

Лемма 8. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $\bigcup L(f, x) = \mathbf{R}P^1$ (*здесь объединение берется по множеству всех антиподальных пар* M);

2) *если* $L(f, x) \cap L(g, y) \neq \varnothing$, *то пары* (f, x) *и* (g, y) *смежны*;

3) *если* $\operatorname{int}(L(f, x) \cap L(g, y)) \neq \varnothing$, *то пары* (f, x) *и* (g, y) *сильно смежны*.

Доказательство немедленно следует из леммы 7.

Теперь мы можем сформулировать алгоритм построения минимального объемлющего параллелограмма.

Алгоритм 1. 1) Построить выпуклую оболочку $C = \operatorname{conv} N$.

2) Найти все антиподальные пары C.

3) Для каждой антиподальной пары построить разделяющее множество.

4) Для каждой стороны g многоугольника C найти те разделяющие множества, которые содержат $\Gamma(g)$.

5) Для каждого такого множества $L(f, x)$ построить параллелограмм, несущий (f, x) и (g, t), где t — антипод g, и вычислить его площадь.

Теорема 1. *Минимальный (по площади) из параллелограммов, построенных на шаге 5) алгоритма 1,— искомый. Он может быть найден за* $O(n \log n)$ *операций, где* $n = |N|$.

Доказательство. То, что определенный указанным образом параллелограмм искомый, следует из леммы 5 и утверждения 1) леммы 8.

Оценим сложность алгоритма. Сложность шага 1) есть $O(n \log n)$ (см., например, [1]).

Шаг 2) может быть выполнен за $O(n)$ операций. Для этого необходимо сначала за $O(n)$ операций найти произвольную пару параллельных опорных прямых (например, максимизируя и минимизируя какую-либо из координат точек N), а затем вычислить функции γ_v и γ_a и воспользоваться леммой 3.

Шаг 3) для каждой пары (f, x) выполняется за $O(1)$ операций, так как разделяющее множество $L(f, x)$ определяется прямыми, проведенными через x и концы f. Поскольку общее число антиподальных пар не превосходит $2n$, всего на выполнение шага 3) необходимо $O(n)$ операций.

Шаг 4) для каждой стороны g может быть выполнен за $O(\log n)$ операций. Для этого необходимо предварительно упорядочить разделяющие множества и заметить, что в силу лемм 7 и 8 каждая точка $\mathbf{R}P^1$ принадлежит не более чем четырем таким множествам. Поскольку всего необходимо упорядочить не более $4n$ чисел и проверить n точек, сложность выполнения всего шага 4) равна $O(n \log n)$.

Наконец, по тем же соображениям сложность выполнения всего шага 5) равна $O(n)$. Теорема доказана.

Заметим, что даже если выпуклая оболочка N уже известна, предлагаемый алгоритм не позволяет найти минимальный объемлющий параллелограмм за $O(n)$ действий — этому препятствует сложность шага 4). Для построения алгоритма с линейной оценкой сложности нам потребуются дополнительные рассуждения.

Будем говорить, что на конечном множестве X задано *циклическое упорядочение* $\prec$, если для каждой тройки попарно различных элементов $a, b, c \in X$ справедливо ровно одно из соотношений $a \prec b \prec c$ и $a \prec c \prec b$, причем выполнены следующие свойства: если $a \prec b \prec c$, то $b \prec c \prec a$ и $c \prec a \prec b$; если, кроме того, $a \prec d \prec b$, то $d \prec b \prec c$.

Пусть M — выпуклый многоугольник. Фиксация ориентации плоскости определяет на множествах вершин и сторон M естественные циклические упорядочения. Для удобства изложения будем сначала считать, что никакие две стороны M не параллельны. В этом случае отображение $\Gamma: G \to \mathbf{R}P^1$ индуцирует на множестве сторон M еще одно циклическое упорядочение, которое мы будем называть *проективным*. Поскольку в рассматриваемом случае каждая сторона M входит ровно в одну антиподальную пару, мы тем самым получаем циклическое упорядочение на множестве антиподальных пар, обозначаемое $\prec$ и также называемое проективным.

В случае, когда у M есть пары параллельных сторон, проективное упорядочение $\prec$ определяется на множестве классов сильной смежности антиподальных пар. Каждый такой класс $[f]$ состоит либо из одной пары (если соответствующая сторона f не параллельна никакой другой стороне M), либо из четырех пар (если соответствующая сторона f параллельна некоторой другой стороне M). При последовательном обходе множества антиподальных пар классы сильной смежности проходятся в соответствии с проективным упорядочением $\prec$, а пары внутри каждого класса — в произвольном порядке.

Пусть M — выпуклый многоугольник, u, v, w — три последовательных вершины M. Зафиксируем направление обхода границы M, задаваемое вершинами u, v, w, и определим соответствующее проективное циклическое упорядочение на множестве классов сильной смежности антиподальных пар.

Лемма 9. *Пусть (f, x) — произвольная uv-разделимая антиподальная пара, (g, t) — произвольная $\imath w$-разделимая антиподальная пара, тогда* $[f] \leqslant [g] < [vw]$.

Доказательство. Проведем через x прямую, параллельную vw. Если эта прямая — опорная для M, то положим $z = x$, в противном случае обозначим через z вершину M, непосредственно следующую при выбранном направлении обхода за второй точкой пересечения этой прямой с границей M. Через y обозначим тот конец стороны f, который при выбранном направлении обхода непосредственно предшествует другому концу f. Граница M очевидным образом разбивается на xy-, yz- и zx-цепи.

Покажем, что хотя бы одна вершина пары (g, t) является внутренней вершиной yz-цепи. Действительно, пусть это не так. Очевидно, прямая, проведенная через любую отличную от x вершину zx-цепи параллельно vw, не содержит точек xy-цепи, а прямая, проведенная через любую отличную от x вершину xy-цепи параллельно $\imath w$, не содержит точек zx-цепи. Следовательно, все вершины пары (g, t) должны одновременно принадлежать либо xy-цепи, либо zx-цепи. Но пары с таким свойством, очевидно, не являются антиподальными.

Рассмотрим теперь множество классов сильной смежности пар (g, t) таких, что хотя бы одна вершина пары является внутренней вершиной yz-цепи. Из леммы 3 следует, что для всех таких классов $[g]$ справедливы соотношения $[f] \leqslant [g] \leqslant [zz']$, где z' — вершина M, непосредственно предшествующая z при зафиксированном направлении обхода. Из определения вершины z вытекает, что $[f] \leqslant [zz'] \leqslant [\imath w]$, причем если $[zz'] = [\imath w]$, то, очевидно, $[g] \neq [zz']$. Отсюда получаем $[f] \leqslant [g] < [vw]$, что и требовалось.

Сформулируем теперь алгоритм построения минимального объемлющего параллелограмма для выпуклого многоугольника M.

Алгоритм 2. 1) Построить множество всех антиподальных пар M.

2) Разбить построенное множество на классы сильной смежности и построить проективное циклическое упорядочение этих классов.

3) Для каждой стороны g многоугольника M найти все g-разделимые антиподальные пары.

4) Для каждой такой пары (f, x) построить параллелограмм, несущий (f, x) и (g, t), где t — антипод g, и вычислить его площадь.

Теорема 2. *Минимальный (по площади) из параллелограммов, построенных на шаге 4) алгоритма 2, — искомый. Он может быть найден за $O(n)$ операций, где $n = |M|$.*

Доказательство. То, что определенный указанным способом параллелограмм искомый, следует из леммы 5. Оценим сложность алгоритма.

Сложность шага 1) — $O(n)$ (см. доказательство теоремы 1).

Сложность шага 2) составляет также $O(n)$, поскольку нетривиальные классы сильной смежности выявляются уже на шаге 1), а для построения проективного упорядочения достаточно зафиксировать произвольную антиподальную пару (g, t) и слить два упорядоченных списка: в первый входят пары, сторона которых лежит между g и t, во второй — пары, сторона которых лежит между t и g.

Шаг 3) можно выполнить за $O(n)$ операций следующим образом. Зафиксировав произвольную сторону g, найдем за $O(n)$ g-разделимую антиподальную пару (f, x). В силу леммы 7, проверив за $O(1)$ все смежные с (f, x) пары, мы найдем все g-разделимые антиподальные пары. Перейдем теперь к стороне g', следующей за g при зафиксированном естественном упорядочении сторон M. Для отыскания g'-разделимой антиподальной пары будем выполнять последовательный обход проективно упорядоченного множества антиподальных пар, начиная с класса сильной смежности $[f]$. Лемма 9 утверждает, что искомая пара будет найдена при таком обходе еще до того, как встретится класс $[g']$. Поскольку однократному последовательному обходу множества сторон M при естественном упорядочении соответствует двукратный последовательный обход множества определяемых этими сторонами антиподальных пар при проективном упорядочении, получаем, что для выполнения шага 3) достаточно двукратного просмотра множества антиподальных пар. Следовательно, сложность выполнения шага 3) есть $O(n)$.

Наконец, шаг 4) в точности соответствует шагу 5) алгоритма 1, и сложность его выполнения, следовательно, есть $O(n)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ли Д., Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Обзор // Киб. сб. Нов. сер.— 1987.— Вып. 24.— С. 5—96.
2. Chang J. S., Yap C. K. A polynomial solution for potatopeeling problem//Discr. Comp. Geom.— 1986.— V. 1, №2.— P. 155—182.
3. Freeman H., Shapira R. Determining the minimal-area encasing rectangle for an arbitrary closed curve//Comm. ACM.— 1975.— V. 18, №7.— P. 409—413.
4. Klee V., Laskowski M. C. Finding the smallest triangles containing a given convex polygon//J. Algor.— 1985.— V. 6, №3.— P. 359—375.
5. O'Rourke J., Aggarwal A., Maddila S., Baldwin M. An optimal algorithm for finding minimal enclosing triangles//J. Algor.— 1986.— V. 7, № 2.— P. 258— 269.

Статья поступила 28.09.89